



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

QUESTÃO 2

①

TEOREMA DE STOKES: SEJA $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ UM ABERTO
E $K \subset \Omega$ UM COMPACTO DE INTERIOR NÃO-VAZIO
E FRONTEIRA DE CONTEÚDO LISO. SUPONHAMOS
QUE $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ SEJA FECHADA, SIMPLES, DE
CLASSE C^1 POR PARTES, ORIENTADA POSITIVAMENTE
TE, CUA IMAGEM É A FRONTEIRA DE K . SEJA
 $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ DE CLASSE C^2 ~~CONTINUA~~ E NULTEIVA
NO INTERIOR DE K . TOMEMOS $\Gamma = \sigma \circ \gamma$. SEJA
 $F: \text{ABERTO CONTENDO } \text{Im}(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}^3$ DE CLASSE C^1 .

ENTÃO

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{\sigma} \text{ROT } \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

TEOREMA DE GAUSS: SEJA $F = (P, Q, R)$ UM
CAMPO DE CLASSE C^1 NUM ABERTO CONTENDO R ,
ONDE O BORNO DE R , DENOTADO POR ∂R , É
A UNIÃO DE SUPERFÍCIES REGULARES $S_1 \cup \dots \cup S_k$, ONDE
EM CADA S_i PODEMOS TOMAR NORMAL APONTANDO
PARA FORA. ASSIM, VALE QUE

$$\iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_R \text{DIV } \vec{F} \cdot dV.$$



② ~~PROVADE~~ DE GREEN DE USO COMUM:

$$\iint_{\partial R} \frac{\partial u}{\partial \vec{m}} d\vec{S} = \iint_{\partial R} \nabla u \cdot \vec{m} dS$$

$$= \iint_{\partial R} \nabla u d\vec{S}$$

$$\stackrel{\text{STOKES}}{=} \iiint_R \operatorname{div}(\nabla u) dV$$

$$= \iiint_R \Delta u dV.$$

③ CONSIDERE A REGIÃO DE $\mathbb{R}^3$ DELIMITADA POR DUAS ESFERAS DE RAIO $\sqrt{r_1}$ E $\sqrt{r_2}$, RESPECTIVAMENTE, $r_1 < r_2$, PELOS CONES REIOS COM INCLINAÇÃO DETERMINADA A γ DADAS POR ϕ_1 E ϕ_2 (FÁCIL OBTER ADICIONALMENTE). POR ORA, ESSA REGIÃO TEM A FORMA .



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

VAMOS NOS RESTRINGIR À PARCELA DA REGIÃO DE $\mathbb{R}^3$ DADA POR $D = \{(r, \phi, \theta) \text{ , PREVIAMENTE DEF. NO ENUNCIADO, COM } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \}$, ONDE CHEGAMOS A UMA REGIÃO EM $\mathbb{R}^3$ DO TIPO



E CONSIDEREMOS NORMAL APOIANDO PARA FORA. VIA MUDANÇA DE VARIÁVEIS E CÁLCULO BUCROATICO, OBTÉM-SE

$$\nabla U(r, \phi, \theta) = \left(r^2 \sin(\theta) \frac{\partial U}{\partial r}, \sin(\theta) \frac{\partial U}{\partial \phi}, \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)$$

Assim,

$$\iint_{\partial R} \nabla U \cdot d\vec{m} = \iint_{[\theta_1, \theta_2] \times [\phi_1, \phi_2]} \nabla U(r, \phi, \theta) \cdot \vec{m}_1 - \iint_{[\theta_1, \theta_2] \times [\phi_1, \phi_2]} \nabla U(r, \phi, \theta) \cdot \vec{m}_2$$

$$+ \iint_{[r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]} \nabla U(r, \phi, \theta) \cdot \vec{m}_3 - \iint_{[r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]} \nabla U(r, \phi, \theta) \cdot \vec{m}_4$$

$$+ \iint_{[r_1, r_2] \times [\phi_1, \phi_2]} \nabla U(r, \phi, \theta) \cdot \vec{m}_5 - \iint_{[r_1, r_2] \times [\phi_1, \phi_2]} \nabla U(r, \phi, \theta) \cdot \vec{m}_6$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

(5) FAZENDO A MUDANÇA DE VARIÁVEIS,

$$\begin{aligned} \iint_{\partial R} \nabla u \cdot d\mathbf{m} &= \iiint_{\substack{\text{REGIÃO} \\ \text{DEFINIDA} \\ \text{ACIMA}}} \Delta u(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{r_1, \phi_1, \theta_1}^{r_2, \phi_2, \theta_2} \Delta u(r, \phi, \theta) \, r^2 \sin^2 \phi \, dr \, d\phi \, d\theta \end{aligned}$$

POR OUTRO LADO, O TEOREMA DE STOKES NOS DÁ

$$\iint_{\partial R} \nabla u \cdot d\mathbf{m} = \iiint_R \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \nabla u(r, \phi, \theta) \, dV_{\text{esférico}}$$

EXECUTANDO E, COMO $r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2$ SÃO ARBITRÁRIOS, A COMPARAÇÃO DESSES RESULTADOS NOS DÁ O RESULTADO:

$$\Delta u(r, \phi, \theta) r^2 \sin^2 \phi = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \nabla u(r, \phi, \theta).$$



QUESTÃO 1

① Seja E um espaço vetorial complexo com produto interno, dimensão finita. Tomemos $A: E \rightarrow E$ um operador linear.

$B(\lambda; m)$ é um bloco de Jordão e é da forma

$$B(\lambda; m) = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{m \times m}$$

Com os demais elementos sendo nulos. Dizemos que um operador linear $A: E \rightarrow E$ está na forma canônica de Jordão se admite uma base na qual a matriz de A é formada por blocos de Jordão ao longo da diagonal principal e os demais elementos sendo nulos. Os λ 's são os autovalores de A .



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

• Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são autovalores com multiplicidades algébricas $k_1, \dots, k_n$, ($k_1 + \dots + k_n = \dim E$) então os blocos devem estar organizados de forma que

$$B(\lambda_i, k_{1,i}), \dots, B(\lambda_i, k_{s,i})$$

onde

$$l_{1,i} + \dots + l_{s,i} = k_i$$

$$l_{1,i} \geq l_{2,i} \geq \dots \geq l_{s,i}.$$

Teorema: No contexto acima, E tem uma base na qual o operador $A: E \rightarrow E$ tem a forma canônica de Jordan.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \det(tI - A) &= t^5 + 2t^2a + a^2t \\ &= t(t^2 + a)^2 = t(t - \sqrt{a})^2(t + \sqrt{a})^2 \end{aligned}$$

A forma canônica possível é

$$\begin{bmatrix} \sqrt{a} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \sqrt{a} & & \\ & & & -\sqrt{a} & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & -\sqrt{a} & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

com os demais elementos nulos,



QUESTÃO 3

(1)

TEOREMA CENTRAL DO LIMITE:

SEJA $\{X_m\}$ uma sequência de
VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES
COM ESPERANÇA $E(X_m) = \lambda_m$. SEJA
 $\sigma_i^2 < \infty$ SUAS VARIÂNCIAS, $i \geq 1$, E TO-
MAMOS $S_m^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2$, ONDE VAMOS AS-
SUMIR QUE $\lim_{m \rightarrow +\infty} S_m^2 = +\infty$. SE,

DADO $\varepsilon > 0$, VALE QUE

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_m^2} \sum_{j=1}^m \int_{|x - \lambda_j| \geq \varepsilon S_m} x^2 dF_{X_j} = 0$$

ENTÃO ~~SEJA~~ $\frac{(X_1 - \lambda_1) + \dots + (X_m - \lambda_m)}{S_m}$ CONVER-

GE EM DISTRIBUIÇÃO PARA $N(0,1)$.



② Em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dizemos que P é uma medida de probabilidade se $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ for uma medida e $P(\Omega) = 1$. Uma variável aleatória $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável, onde em $\mathbb{R}$ estamos usando a σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}$. Via P e X , definimos a distribuição de medida $\mu_X: \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$

$$\mu_X(A) = P(X \in A)$$

E a distribuição acumulada $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Se $\int |X| dP < \infty$ definimos $E(X) = \int X$ a sua esperança. É fácil verificar que

$$E(X) = \int x d\mu_X.$$

Dada uma sequência de variáveis aleatórias X_n , dizemos que X_n converge em distribuição para X , denotamos



$X_n \xrightarrow{d} X$ se $F_{X_n} \rightarrow F_X$ ONDE F_X
É CONTÍNUA.

DEFINIMOS A CARACTERÍSTICA DA V.A.
 X POR

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= E(e^{itX}) \\ &= \int e^{itX} dP\end{aligned}$$

É POSSÍVEL PROVAR QUE

$$\varphi_X(t) = \int e^{itx} d\mu_X.$$

TAMBÉM, É POSSÍVEL PROVAR QUE
SE $X_n \xrightarrow{d} X$ ENTÃO $E(e^{itX_n}) \rightarrow E(e^{itX})$,
ISTO É, $\varphi_{X_n} \rightarrow \varphi_X$. ESSE RESULTADO
NÃO É TRIVIAL POIS CONV. EM DISTRIBUIÇÃO
NÃO IMPLICA CONVERGÊNCIA PONTOUAL
E PORTANTO NÃO SE APLICA O TEOREMA
DA CONV. DOMINADA SIMPLEMENTE. 10



há uma recíproca desse resultado:
se $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$
e $\varphi_X(t)$ é contínua em $t=0$,
então $X_n \xrightarrow{d} X$. Esse é o con-
teúdo do Teorema de Levy.

De agora em diante seja
 X a v.a. tal que

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^x e^{-s^2/2} ds$$

$$\Rightarrow dF_X = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/2} dx.$$

Temos que

$$\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}.$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

DE FATO,

$$\psi_x(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx - x^2/2} dx$$

$$= \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{t^2/2 + itx - x^2/2} dx$$

$$= \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx$$

$$= \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}$$

$$= e^{-t^2/2}$$



A demonstração do teorema consiste em combinar o teorema de LEVY com essa última observação.

Lembramos que $X_1, \dots, X_n$ são V.A. INDEPENDENTES se

$$P(\{X_1 \in A_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in A_n\}) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$$

ONDE $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$. ~~DE~~ DIZEMOS QUE UMA FAMÍLIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS É INDEPENDENTE QUANDO QUALQUER CONJUNTO FINITO EXTRAÍDO FOR INDEPENDENTE.

Se $f_1, \dots, f_n$ ¹²⁻⁷¹¹² são mensuráveis e $X_1, \dots, X_n$ INDEP. então $f_1 \circ X_1, \dots, f_n \circ X_n$ são INDEPENDENTES, uma vez $f_i(A) \in \mathcal{B}, \forall A \in \mathcal{B}$.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

CONSEGUIMOS SIMPLIFICAR AS HIPÓTESES
SEM PERDA DE GERALIDADE.

TEOREMA: Seja X_m seq. de V.A.
INDEPENDENTES com $E(X_i) = 0$ e
 $\sigma_i^2 < \infty$ e $S_m^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$. Se

DADO $\varepsilon > 0$, TEM-SE A CONDIÇÃO DE
LINDBERG:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_m^2} \sum_{j=1}^m \int_{|x| \geq \varepsilon S_m} x^2 d\mu_j = 0$$

OU

$$\frac{X_1 + \dots + X_m}{S_m} \xrightarrow{d} X.$$

DEMONSTRAÇÃO: PROVAREMOS QUE

$$\varphi_{\frac{X_1 + \dots + X_m}{S_m}} \rightarrow e^{-t^2/2}$$

OU SIMPLEMENTE QUE

$$\ln \varphi_{\frac{X_1 + \dots + X_m}{S_m}} + \frac{t^2}{2} \rightarrow 0.$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Note que

$$\ln \varphi_{\frac{x_1 + \dots + x_m}{s_m}} = \ln \int e^{\frac{x_1 + \dots + x_m}{s_m} \cdot it} dp$$

V.A.
INDER.
E
 $F(t) = e^{itX}$
MOVS.

$$= \ln \prod_{j=1}^m \int e^{\frac{itx_j}{s_m}} dp$$
$$= \sum_{j=1}^m \ln \varphi_{x_j}\left(\frac{t}{s_m}\right)$$

Também

$$s_m^2 = \sum_{j=1}^m \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^m \int x^2 d\mu_j$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{s_m^2} \sum_{j=1}^m \int x^2 d\mu_j$$

$$\Rightarrow \frac{t^2}{2} = \sum_{j=1}^m \int \frac{t^2 x^2}{2s_m^2} d\mu_j$$



COMBINANDO, OBTENHAMOS

$$\ln \varphi_{\frac{x_1 + \dots + x_m}{s_m}} + \frac{t^2}{2} = \sum_{j=1}^m \underbrace{\ln \varphi_{x_j}\left(\frac{t}{s_m}\right)}_{\substack{\downarrow \\ \text{VAMOS ESTIMAR ESSE TERMO}}}$$

• TEMOS QUE

$$\ln \varphi_{x_j}\left(\frac{t}{s_m}\right) = \ln \left(1 + \varphi_{x_j}\left(\frac{t}{s_m}\right) - 1 \right).$$

NOTE QUE

$$\varphi_{x_j}\left(\frac{t}{s_m}\right) = \int e^{\frac{itx_j}{s_m}} d\mu = \int e^{\frac{itx}{s_m}} d\mu_j.$$

APLICAMOS SÉRIE DE TAYLOR:

$$\begin{aligned} E(e^{itx}) &= 1 + (it)E(X) + \frac{(it)^2}{2} E(X^2) \\ &\quad + \dots + \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) \\ &\quad + o(t^k), \end{aligned}$$

ONDE É POSSÍVEL PROVAR (MODO TRIVIAL) QUE
 $E(X^k) < \infty \Rightarrow |o(t)| \leq 4|E(X^k)|.$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Como $E(X_j^2) < \infty$, temos que

$$\varphi_{X_j}(t) = 1 + \frac{(it)^2}{2} \sigma_j^2 + t^2 g(t)$$

onde $|g(t)| \leq 4E(X^2) = 4\sigma_j^2$. Assim,

$t = t/s_m$ implica

$$\left| \varphi_{X_j}\left(\frac{t}{s_m}\right) - 1 \right| \leq \frac{t^2}{2s_m^2} \sigma_j^2 + \frac{4t^2}{s_m^2} \sigma_j^2$$

$$\rightarrow \sup_{|t| \leq T} \max_{1 \leq j \leq m} \left| \varphi_{X_j}\left(\frac{t}{s_m}\right) - 1 \right|$$

$$\leq C_0 T^2 \cdot \max_{1 \leq j \leq m} \frac{\sigma_j^2}{s_m^2}.$$

VAMOS PROVAR QUE $\max_{1 \leq j \leq m} \frac{\sigma_j^2}{s_m^2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

ORA, DADO $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \sigma_j^2 &= \int x^2 d\mu_j = \int_{|x| \leq s_m \varepsilon} x^2 d\mu_j + \int_{|x| > s_m \varepsilon} x^2 d\mu_j \\ &\leq \varepsilon^2 s_m^2 + \int_{|x| > s_m \varepsilon} x^2 d\mu_j \end{aligned}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

DIVIDINDO POR S_m E USANDO A HIPÓTESE DE LINDBERGH, OBTENHAMOS QUE

$$\max_{1 \leq j \leq m} \frac{\sigma_j^2}{\sum_{j=1}^m \sigma_j^2} \longrightarrow 0.$$

• SÉRIE DE TAYLOR EM $\ln(1+z)$:

$$\ln(1+z) = z + o(z^2)$$

IE, DADO $\delta > 0 \exists \epsilon > 0$ TA $|o(z^2)| \leq \delta z^2$.

ASSIM, PARA n SUFICIENTEMENTE GRANDE,

$$|\varphi_{X_j}\left(\frac{t}{S_m}\right) - 1| < \delta \quad \text{DONDE}$$

$$\begin{aligned} \ln \varphi_{\frac{X_1 + \dots + X_m}{S_m}} + \frac{t^2}{2} &= \sum_{j=1}^m \ln \left(1 + \varphi_{X_j}\left(\frac{t}{S_m}\right) - 1 \right) + \int \frac{t^2 x^2}{2 S_m^2} d\mu_j \\ &\quad + o(|\varphi_{X_j}\left(\frac{t}{S_m}\right) - 1|^2) \\ &= \sum_{j=1}^m \varphi_{X_j}\left(\frac{t}{S_m}\right) - 1 + \int \frac{t^2 x^2}{2 S_m^2} d\mu_j \\ &\quad + o(|\varphi_{X_j}\left(\frac{t}{S_m}\right) - 1|^2) \\ &\xrightarrow{1 = \int d\mu_j} \sum_{j=1}^m \int \left(e^{\frac{itx}{S_m}} - 1 - \frac{itx}{S_m} + \frac{t^2 x^2}{2 S_m^2} \right) d\mu_j \\ &\quad + o(|\varphi_{X_j}\left(\frac{t}{S_m}\right) - 1|^2) \end{aligned}$$

$\int \frac{itx}{S_m} d\mu_j = 0$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

~~TAYLOR PARA~~
 ~~$e^{-i\theta} = 1 - i\theta - \frac{(i\theta)^2}{2} + O(|\theta|^2)$~~
~~É NESSE CASO TEMOS UMA CONJUNTAÇÃO~~
~~UNIVERSAL (E TEM DERIVADAS LIDAS) TAL QUE~~
 ~~$O(|\theta|^2) \leq C|\theta|^2$~~
~~At, PARA $\theta = \frac{itx}{s_m}$~~
 ~~$\ln \phi_{x_1, \dots, x_n} + \frac{t^2}{2} =$~~

VAMOS PROVAR AÍ O QUE

$$(1) \sum O(|\psi_{x_j}(t/s_m) - 1|^2) \leq C \sum_{j=1}^m |\psi_{x_j}(t/s_m) - 1|^2 \rightarrow 0$$

$$(2) \sum_{j=1}^m \int e^{\frac{itx}{s_m}} - 1 - \frac{itx}{s_m} + \frac{t^2 x^2}{2s_m^2} dx_j \rightarrow 0$$

É ISSO CONCLUÍ A PROVA.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

PARA ①, NOTE QUE

$$\sum_{j=1}^m \left| \psi_{x_j}\left(\frac{t}{s_m}\right) - 1 \right|^2 \leq \sup_{|t| \leq T} \max_{1 \leq j \leq m} \left| \psi\left(\frac{t}{s_m}\right) - 1 \right| \cdot \sum_{j=1}^m \left| \psi_{x_j}\left(\frac{t}{s_m}\right) - 1 \right|$$

É TAL QUE O PRIMEIRO TERMO À DIREITA VAI
PARA ZERO E O SEGUNDO É LIDO. ORA,
 $e^{-i\theta} = 1 - i\theta + o(\theta^2)$, NOTE $|o(\theta^2)| \leq C|\theta|^2$ PARA
UMA CONSTATANTE $C > 0$ UNIVERSAL, POIS $e^{-i\theta}$ TEM
DERIVADAS LIDAS. AÍ, $\theta = \frac{tx}{s_m}$ IMPULSA

$$\begin{aligned} \left| \psi_{x_j}\left(\frac{t}{s_m}\right) - 1 \right| &= \left| \int e^{i \frac{tx}{s_m}} - 1 - \frac{itx}{s_m} d\mu_j \right| \\ &\leq C \int \frac{t^2 x^2}{s_m^2} d\mu_j \\ &= CT^2 \frac{\sigma_j^2}{s_m^2} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

TAMBÉM,

$$\sup_{|t| \leq T} \sum_{j=1}^m \left| \psi_{x_j}\left(\frac{t}{s_m}\right) - 1 \right| \leq \sum_{j=1}^m CT^2 \frac{\sigma_j^2}{s_m^2} = \frac{C \sum_{j=1}^m \sigma_j^2}{s_m^2} = CT^2.$$

Assim, concluímos A PRIMEIRA ETAPA.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

PARA (2), TEMOS

$$\sum_{j=1}^m \int e^{\frac{itx}{s_m}} - 1 - \frac{itx}{s_m} + \frac{t^2 x^2}{2s_m^2} d\mu_j = \sum_{j=1}^m \int_{|x| \geq \varepsilon s_m} (\dots) + \int_{|x| < \varepsilon s_m} (\dots) d\mu_j$$

PARA O PRIMEIRO TERMO, TEMOS QUE $e^{-i\theta} = 1 - i\theta + O(\theta^2)$ COM CONSTATANTE UNIVERSAL: $\theta = tx/s_m$ IMPLICA

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^m \int_{|x| \geq \varepsilon s_m} e^{\frac{itx}{s_m}} - 1 - \frac{itx}{s_m} + \frac{t^2 x^2}{2s_m^2} d\mu_j \right| \\ & \leq \int_{|x| \geq \varepsilon s_m} C \left| \frac{tx}{s_m} \right|^2 + \frac{t^2 x^2}{2s_m^2} d\mu_j \\ & \leq \frac{\tilde{C} T^2}{s_m^2} \int_{|x| \geq \varepsilon s_m} x^2 d\mu_j \rightarrow 0 \end{aligned}$$

PELA HIPÓTESE DE LINDBERGH PARA O SEGUNDO TERMO, TEMOS QUE $e^{-i\theta} = 1 - i\theta - \frac{(i\theta)^2}{2} + O(\theta^3)$ COM CONSTATANTE UNIVERSAL. ALI, $\theta = tx/s_m$:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^m \int_{|x| \leq \varepsilon s_m} e^{\frac{itx}{s_m}} - 1 - \frac{itx}{s_m} + \frac{t^2 x^2}{2s_m^2} d\mu_j \right| \leq \sum_{j=1}^m \int_{|x| \leq \varepsilon s_m} C \left| \frac{tx}{s_m} \right|^3 d\mu_j \\ & \leq C \cdot \frac{\varepsilon s_m}{s_m^3} T^3 \cdot \sum_{j=1}^m \int_{|x| \leq \varepsilon s_m} x^2 d\mu_j \\ & \leq \frac{C \varepsilon T^3}{s_m^2} \cdot s_m^2 \underbrace{\sum_{j=1}^m \int_{|x| \leq \varepsilon s_m} x^2 d\mu_j}_{= \sigma_j^2} \\ & \leq C \varepsilon T^3, \end{aligned}$$

E ISSO CONCLUI A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA.